5.4 DINÁMICA CIRCULAR

En este inciso sólo se tomará en cuenta el movimiento circular uniforme. Por lo tanto, si un cuerpo describe una trayectoria circular este estará sujeto a una aceleración centrípeta dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = R\,\omega^2 \qquad (5.6)$$

dicha aceleración siempre estará dirigida hacia el centro.

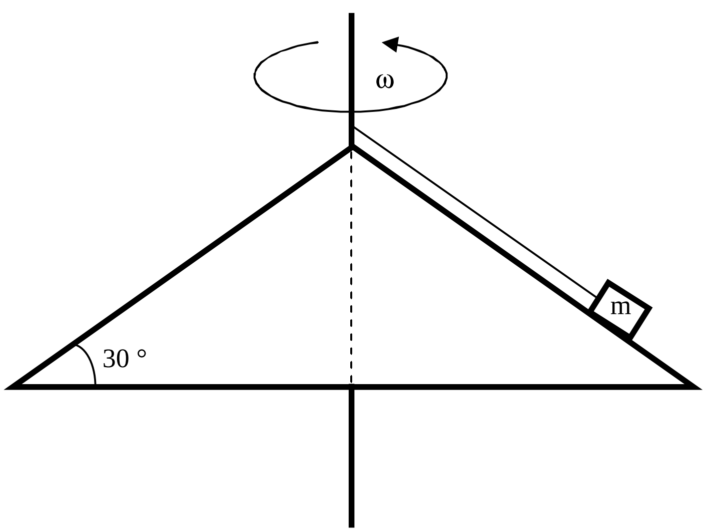
Luego, si un cuerpo posee aceleración sobre éste deben estar actuando fuerzas, en consecuencia, se debe cumplir la segunda ley de Newton, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ri} = m\,a_c \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad (5.7)$$

donde F_{ri} está relacionado con las componentes de las fuerzas en el eje radial.

En este punto se debe aclarar que, al elegir el sistema de ejes coordenados, uno de ellos (denominado eje radial) debe ser paralelo al radio del círculo que describe el cuerpo. Además, al asignar signos a las componentes radiales de las fuerzas, se consideran positivas a las fuerzas que tienen el mismo sentido que la aceleración centrípeta y negativas en caso contrario.

Ejemplo.- Un cuerpo de masa $m = 1$ kg se encuentra sobre una superficie cónica como indica la figura y gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular $\omega = 5$ rad / s, sin despegarse de la superficie. Si el radio de la trayectoria circular que describe el cuerpo es $R = 0{,}5$ m y la tensión en la cuerda es $T = 10$ N, halle la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la superficie cónica. Considere que, $\theta = 30°$.

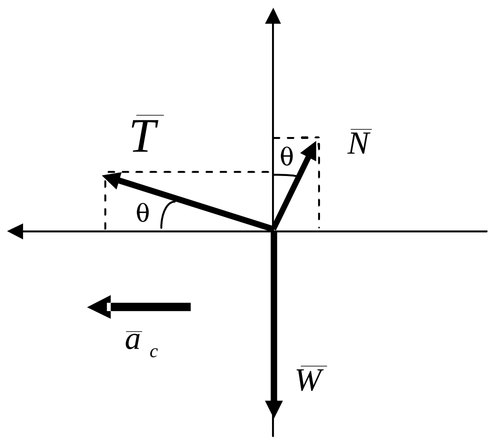


Eje y:

$$N_y + T_y + f_{ry} = W$$

$$N \cos\theta + T \operatorname{sen}\theta + f_r \operatorname{sen}\theta = m\,g$$

$$N \cos\theta = m\,g - T \operatorname{sen}\theta - f_r \operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$



Eje x:

$$T_x + f_{rx} - N_x = m\,a_c$$

$$T \cos\theta + f_r \cos\theta - N \operatorname{sen}\theta = m\,R\,\omega^2$$

$$N \operatorname{sen}\theta = T \cos\theta + f_r \cos\theta - m\,R\,\omega^2 \qquad (2)$$

Dividiendo (2) entre (1),

$$\frac{N \operatorname{sen}\theta}{N \cos\theta} = \frac{T\cos\theta + f_r \cos\theta - m R \omega^2}{m g - T \operatorname{sen}\theta - f_r \operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{T\cos\theta + f_r \cos\theta - m R \omega^2}{m g - T \operatorname{sen}\theta - f_r \operatorname{sen}\theta}$$

$$(\,mg - T \operatorname{sen}\theta\,)\operatorname{tg}\theta - f_r \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\theta = T\cos\theta + f_r \cos\theta - m\,R\,\omega^2$$

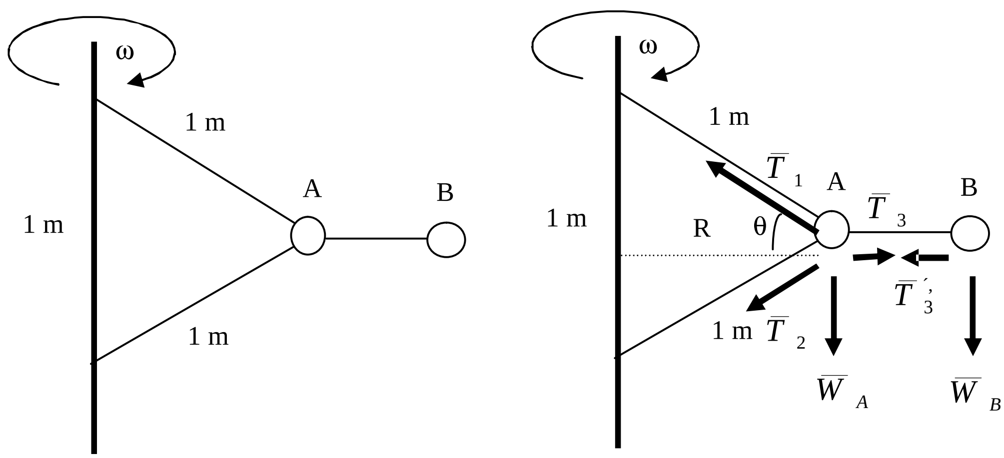
$$(\,m\,g - T \operatorname{sen}\theta\,)\operatorname{tg}\theta + m\,R\,\omega^2 - T\cos\theta = f_r\,(\,\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\theta\,)$$

$$f_r = \frac{(m g - T \operatorname{sen}\theta)\operatorname{tg}\theta + m R \omega^2 - T\cos\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\theta}$$

$$f_r = \frac{\left[(1)(9{,}81) - (10)(\operatorname{sen} 30^\circ)\right](\operatorname{tg} 30^\circ) + (1)(0{,}5)(5)^2 - (10)(\cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ}$$

$$\boxed{f_r = 5{,}7\ \text{N}}$$

Ejemplo.- La esfera A de 500 g de masa mostrada en la figura está unida a una varilla vertical por medio de dos cuerdas y también está unida a la esfera B de 300 g de masa, por medio de otra cuerda de 50 cm de longitud. Cuando el sistema gira alrededor del eje, las cuerdas quedan tensadas según muestra la figura. a) Si la tensión en la cuerda superior (unida a la varilla) es de 10,5 N, ¿cuál es el valor de la velocidad angular? b) ¿Qué valores tienen las tensiones en las cuerdas inferior y horizontal?



a) DATOS:

$m_A = 0{,}5$ kg L = 0,5 m $T_1 = 10{,}5$ N

$m_B = 0{,}3$ kg $\theta = 30°$

Para B, $$T_3 = m_B (R + L)\omega^2$$

Para A en el eje x, $$T_1 \operatorname{sen}\theta = T_2 \operatorname{sen}\theta + m_A g$$

$$T_1 - T_2 = m_A g \operatorname{cosec}\theta \qquad (2)$$

Luego, en el eje y, $$T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta - T_3 = m_A R\omega^2 \qquad (3)$$

(1) en (3), $$(T_1 + T_2)\cos\theta - m_B (R + L)\omega^2 = m_A R\omega^2$$

$$T_1 + T_2 = \left[m_A R + m_B (R + L)\right]\omega^2 \sec\theta \qquad (4)$$

sumando (2) y (4), $$2T_1 = m_A g \operatorname{cosec}\theta + \left[m_A R + m_B (R + L) \right] \omega^2 \sec\theta$$

$$2T_1 - m_A g \operatorname{cosec}\theta = \left[m_A R + m_B (R + L) \right] \omega^2 \sec\theta$$

despejando, $$\omega = \sqrt{\frac{2T_1 \operatorname{sen}\theta - m_A g}{\left[m_A R + m_B (R + L) \right] \operatorname{tg}\theta}}$$

Ademas, $$R = L \cos\theta$$

$$R = (1)(\cos 30°) \qquad \Rightarrow \qquad R = 0{,}87\, m$$

Remplazando,

$$\omega = \sqrt{\frac{(2)(10{,}5)(\operatorname{sen} 30°) - (0{,}5)(9{,}8)}{[(0{,}5)(0{,}87) + (0{,}3)(0{,}87 + 0{,}5)] \operatorname{tg}\theta}}$$

entonces,

$$\boxed{\omega = 3{,}4 \frac{rad}{s}}$$

b) en (1),

$$T_3 = (0{,}3)(0{,}87 + 0{,}5)(3{,}4)^2$$

$$\boxed{T_3 = 4{,}7\, N}$$

de (2),

$$T_2 = T_1 - m_A g \operatorname{cosec}\theta$$

$$T_2 = 10{,}5 - (0{,}5)(9{,}8)(\operatorname{cosec} 30°)$$

$$\boxed{T_2 = 0{,}69\, N}$$

RESUMEN

La fuerza que provoca el movimiento circular se denomina fuerza centrípeta. Un objeto sobre el cual no actúa ninguna fuerza se mueve en línea recta con velocidad constante. Para hacer que el objeto se desvíe de un camino recto a uno circular, debe ejercerse una fuerza centrípeta en ángulo recto a la velocidad del objeto, dirigida hacia el centro del círculo. Dado que esto provoca un cambio en la dirección de la velocidad del objeto, aparece una aceleración centrípeta, dirigida hacia el centro, que provoca (por la ley de Newton) una fuerza centrípeta. Por ejemplo, si se hace girar un lata atada al extremo de una cuerda. Se debe tirar de la cuerda hacia dentro a fin de que la lata siga girando alrededor de la cabeza de uno. Si la cuerda se rompiese, entonces la tension de la cuerda que mantiene a la lata girando desaparecería y la lata continuaria su movimiento en linea recta ya no giraría. Todo movimiento circular requiere de una fuerza de alguna especie. Toda fuerza que obligue a un objeto a describir una trayectoria circular se llama fuerza centrípeta. “Centrípeta” significa que busca el centro, o “dirigida hacia el centro”. La fuerza centrípeta no es un nuevo tipo de fuerza. Se trata simplemente de un nombre con el que se designa *cualquier* fuerza que forme un ángulo de 90 con la trayectoria de un objeto en movimiento y que tienda a producir un moimiento circular. La fuerza gravitacional dirigida hacia el centro de la Tierra mantiene a la Luna en una órbita casi circular. La tension de la cuerda mantenía en nuestro ejemplo a la lata girando. Cuando un auto da vuelta en una esquina, la fricción lateral entre los neumáticos y la calle proporciona la fuerza centrípeta que mantiene al auto sobre una trayectoria curva.

Un ejemplo clásico de estas fuerzas en acción es un pasajero viajando dentro de un autobus. Cuando el autobus toma una curva, si observamos el movimiento del pasajero respecto al coche, el cuerpo del pasajero se ve impulsado hacia el lado del coche contrario al centro de la curva. Esto se atribuye a la fuerza centrífuga, pero se cataloga como fuerza ficticia debido a que no la causa ninguna interacción con otro objeto. Centrifuga significa que huye del centro o se aleja del centro.

Cuando se observa desde un sistema de referencia inercial, lo que realmente ocurre es que la inercia del pasajero se opone a cualquier cambio de movimiento y mantiene al pasajero en la inicial línea recta del movimiento. Desde este punto de vista, la única razón para que el pasajero se vea impulsado hacia un lado del coche es que la persona aún viaja en una línea recta, y el coche ha acelerado. Una vez que el pasajero llega hasta la puerta lateral del coche, el coche es capaz de aplicar la fuerza centrípeta al pasajero para acelerarlo junto con el coche.

El rozamiento entre el asiento y los pantalones del pasajero también contrarrestan a la fuerza centrípeta, y a baja velocidad, a que los pasajeros no se deslicen del asiento; el rozamiento es el único causante de esto. En cambio, el pasajero ejerce una fuerza reactiva contra la puerta: según la segunda definición, esta fuerza también se llamaría fuerza centrífuga.

5.5 ESTATICA

5.5.1 EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

La estática es una parte de la mecánica que tiene como objetivo estudiar el equilibrio de los cuerpos considerándolos como una partícula en un caso y como un sólido rígido por otro lado.

Una partícula se halla en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él se anulan, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{0} \qquad (5.8)$$

Tomando en cuenta en los ejes coordenados,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad (5.9)$$

5.5.2 MOMENTO DE UNA FUERZA (O TORQUE)

La figura 1 muestra una fuerza $\bar{F}$ cuyo punto inicial se localiza, respecto del origen de coordenadas (O), mediante el vector $\bar{r}$. El momento $\bar{\tau}$ de la fuerza $\bar{F}$, respecto del punto O, está definido por,

$$\bar{\tau} = \bar{r} \; x \; \bar{F} \qquad (5.10)$$

vector que es perpendicular al plano determinado por $\bar{r}$ y $\bar{F}$. El brazo de momento de la fuerza $\bar{F}$ es la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de $\bar{F}$.

El sentido de $\bar{\tau}$ queda determinado por la regla de la mano derecha para el producto vectorial de vectores y su módulo es,

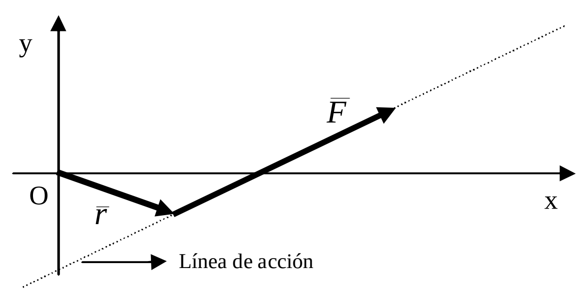


Figura 1

$$\tau = r \; F \; \text{sen}\theta \qquad (5.11)$$

donde θ es el ángulo entre $\bar{r}$ y $\bar{F}$ y r sen θ es el brazo de momento de $\bar{F}$.

5.5.3.EQUILIBRIO DEL SÓLIDO RÍGIDO

Definición de cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es una agrupación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas unas respecto de las otras, es decir que, no pueden deformarse aplicando fuerzas o torques.

Para que un cuerpo rígido este en equilibrio se requiere que,

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = \overline{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{\tau}_i = \overline{0} \qquad (5.12)$$

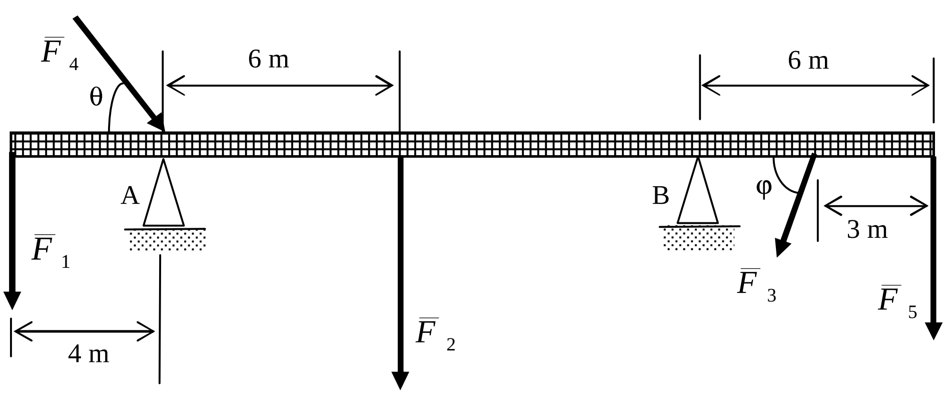
si las fuerzas se encuentran todas en un plano, las ecuaciones vectoriales anteriores se reducen a las tres ecuaciones algebraicas siguientes:

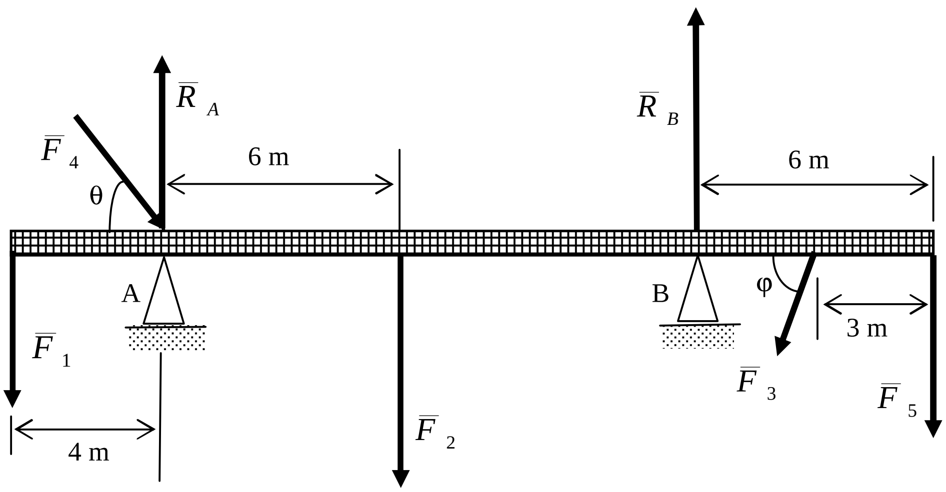
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0 \qquad (5.13)$$

Se debe aclarar que cuando una fuerza aplicada a un sólido rígido trata de hacerla girar en el sentido horario, entonces el torque es negativo y si trata de hacerla girar en el sentido antihorario el torque es positivo.

Ahora se ilustra la técnica de resolución de algunos problemas típicos de estática plana.

Ejemplo.- La barra de la figura tiene una longitud de 25 metros y un peso de 40 kgf, reposa en equilibrio sobre los puntos A y B, bajo la acción de las fuerzas que se indican en la figura. Encontrar las fuerzas ejercidas sobre la barra en los puntos A y B. También determinar el módulo de la fuerza $\overline{F}_4$. Considere: F_1 = 200 kgf ; F_2 = 500 kgf ; F_3 = 100 kgf ; F_5 = 300 kgf ; θ = 40 ° ; φ = 60 °.





Tomando en cuenta las reacciones en A y B , considerando que el peso de la barra está actuando en el punto medio de la barra y descomponiendo las fuerzas $\overline{F}_3$ y $\overline{F}_4$, aplicando sumatoria de fuerzas en el eje x,

$$F_4 \cos 40° = F_3 \cos 60°$$

despejando F_4 ,

$$F_4 = \frac{F_3 \cos 60°}{\cos 40°}$$

reemplazando valores,

$$F_4 = \frac{(100)(\cos 60°)}{\cos 40°} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_4 = 65{,}3 \text{ kgf}}$$

Aplicando sumatoria de torques con respecto a un eje ubicado en el punto A,

$$4 F_1 - 6 F_2 - 8{,}5 W + 15 R_B - 18 F_3 \text{ sen } 60° - 21 F_5 = 0$$

$$15 R_B = -4 F_1 + 6 F_2 + 8{,}5 W + 18 F_3 \text{ sen } 60° + 21 F_5$$

despejando, $$R_B = \frac{-4 F_1 + 6 F_2 + 8{,}5 W + 18 F_3 \text{ sen } 40° + 21 F_5}{15}$$

reemplazando,

$$R_B = \frac{-(4)(200) + (6)(500) + (8{,}5)(40) + (18)(100)(\text{sen } 40°) + (21)(300)}{15}$$

$$\boxed{R_B = 666{,}5 \text{ kgf}}$$

Finalmente, aplicando sumatoria de fuerzas en el eje y,

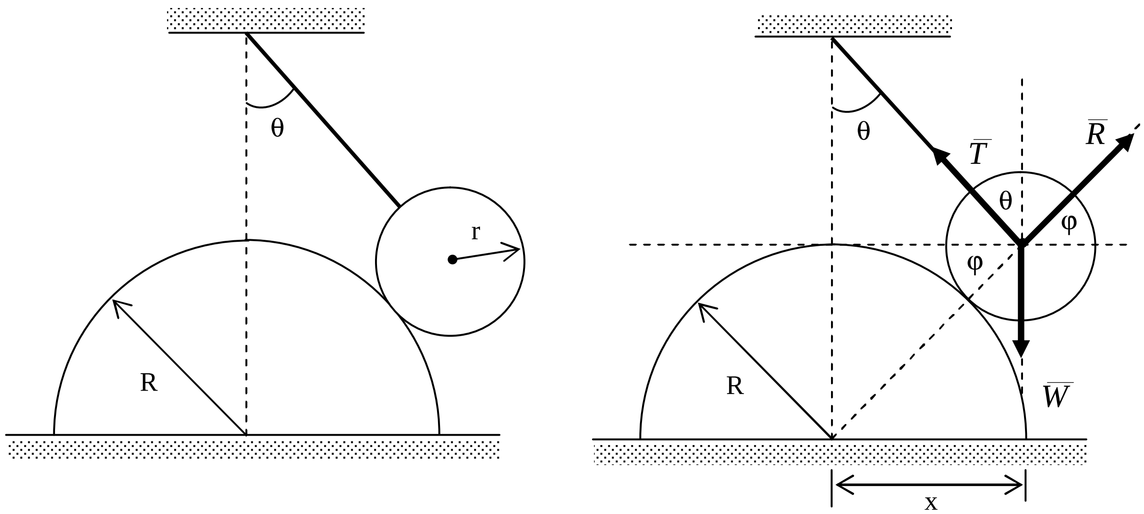
$$- F_1 - F_4 \text{ sen } 40° + R_A - F_2 - W + R_B - F_3 \text{ sen } 60° - F_5 = 0$$

$$R_A = F_1 + F_4 \text{ sen } 40° + F_2 + W - R_B + F_3 \text{ sen } 60° + F_5$$

$$R_A = 200 + (65{,}3)(\text{sen } 40°) + 500 + 40 - 666{,}5 + (100)(\text{sen } 60°) + 300$$

$$\boxed{R_A = 502{,}1 \text{ kgf}}$$

Ejemplo.- La cuerda que sostiene la esfera de radio r , de la figura tiene una longitud igual a 4 r ; la esfera está apoyada en una superficie hemiesférica de radio R = 2 r . Si el peso de la esfera es 100 N, halle la reacción de la superficie hemiesférica y la tensión en la cuerda.



De la figura,

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{R}{R+r} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{2r}{2r+r} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{3}$$

entonces,

$$\varphi = 41{,}8\ °$$

También de la figura,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{5r} \qquad (1)$$

además,

$$(R+r)^2 = R^2 + x^2$$

luego,

$$(2r+r)^2 \ (2r)^2 + x^2$$

$$9r^2 = 4r^2 + x^2$$

$$5r^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = r\sqrt{5} \qquad (2)$$

reemplazando (2) en (1)

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{r\sqrt{5}}{5r}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 26{,}6\,°$$

luego en el eje x,

$$R\cos\varphi = T\,\operatorname{sen}\theta \qquad (3)$$

en el eje y,

$$R\operatorname{sen}\varphi + T\,co\theta = W$$

$$R\operatorname{sen}\varphi = W - T\cos\theta \qquad (4)$$

dividiendo (4) entre (3),

$$\frac{R\operatorname{sen}\varphi}{R\cos\varphi} = \frac{W - T\cos\theta}{T\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{W - T\cos\theta}{T\operatorname{sen}\theta}$$

$$T\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{tg}\varphi = W - T\cos\theta$$

entonces,

$$T = \frac{W}{\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{tg}\varphi + \cos\theta}$$

reemplazando valores,

$$T = \frac{100}{(\operatorname{sen}26{,}6°)(\operatorname{tg}41{,}8°) + \cos 26{,}6°}$$

$$\boxed{T = 77{,}3\,N}$$

De (3),

$$R = \frac{T\operatorname{sen}\theta}{\cos\varphi}$$

$$R = \frac{(77{,}3)(\operatorname{sen}26{,}6°)}{\cos 41{,}8°} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = 46{,}4\,N}$$